PENTÁGONO REGULAR EN VÉSICA DORADA

Angélica María Martínez – Jorge Alberto López
angelicmar5@gmail.com – jorgealbertolopez14@gmail.com
Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara de Maracay - Venezuela

Tema: Pensamiento Geométrico
Modalidad: P (Póster)
Nivel educativo: Terciario - Universitario
Palabras clave: vésica dorada, pentágono regular, número áureo, didáctica de la geometría

Resumen

Algunos conceptos de geometría son poco tratados en la escolaridad, pese a su gran potencial didáctico; tal es el caso de la vésica piscis, proporción dorada y construcción del pentágono regular, los cuales han tenido gran protagonismo en el diseño y las artes. De acuerdo a lo anterior, se realizó un trabajo investigativo sobre la construcción del pentágono regular en el transcurso de la historia y se reconstruyeron paso a paso los métodos empleados, dando como resultado otros hallazgos geométricos y alternativas para fomentar el aprendizaje de la geometría e influir en la creatividad del estudiante. Precisamente esto último, ha generado la presentación del siguiente informe, cuyo objetivo consiste en dar a conocer una nueva forma geométrica llamada "vésica dorada" y su relación con el número de oro en la construcción del pentágono regular. Metodológicamente se trata de un estudio documental, basado en la lectura de varias fuentes bibliográficas, confirmando que a través de la historia de las matemáticas puede extraerse material didáctico para motivar el aprendizaje en los estudiantes y así alcanzar nuevos conocimientos (González, 2004).

Introducción

La geometría es justamente una de las áreas de la matemática que permite el desarrollo del conocimiento intuitivo en el educando gracias a la utilización de símbolos y se concreta a través de procesos lógicos; sin embargo, muchos de nuestros estudiantes en su escolaridad aprenden más sobre temas de matemática relacionados con aritmética y álgebra siendo muy poco discutidos y aplicados los conocimientos geométricos; en tanto, para el futuro docente de matemática debe igualmente incluirse una formación matemática donde los tópicos geométricos se aborden en diferentes contextos, incluidos el histórico y el práctico. Como aporte para tratar de solventar esta problemática, se presenta el siguiente trabajo partiendo del estudio histórico-epistémico de la construcción del pentágono regular como fuente generadora de conceptos geométricos y aspectos educativos para fomentar la intuición en el estudiante y vincularlo con esta área. Precisamente en concordancia con González (2004), de la historia de la matemática se puede extraer material didáctico para motivar prácticas docentes donde se propicie el aprendizaje en los estudiantes y se alcancen nuevos conocimientos; pero además, a lo largo de la historia de la matemática "… es la evidencia intuitiva lo que induce a los matemáticos a aceptar los nuevos conceptos. La lógica siempre viene muy por detrás de la invención y suele ser más difícil de alcanzar." (González, 1991, p. 283). En este sentido, muchos investigadores en Didáctica de la Matemática dan relevancia a un estudio epistemológico e histórico dentro de un trabajo investigativo de tipo didáctico; tal es el caso de Artigue (1990), quien habla de los alcances del análisis epistemológico; también Sierpinska y Lerman (1996), quienes han analizado la relación entre epistemología, matemática y educación. Como dice Peruelo (2003): "la epistemología es una de las herramientas necesarias para el desarrollo de nuevas estrategias para la enseñanza de las ciencias" (p. 329), en este caso para la enseñanza de la matemática; o desde el punto de vista del enfoque onto-semiótico (EOS), como señalan Godino y Batanero (1994), el análisis epistemológico de los objetos matemáticos debe permitir clarificar la naturaleza de dichos objetos y sus diversos significado según los contextos institucionales. Mientras del aspecto histórico "el conocimiento de la Historia de las Matemáticas con sus momentos sublimes y gloriosos y sus períodos sombríos y baldíos, influirá decisivamente en el espíritu del profesor y en su actitud hacia la propia Matemática" (González, 1991, p. 287).

A continuación se describirán en forma sucinta: Algunas construcciones del pentágono en el tiempo, la construcción del pentágono regular en vésica dorada, y reflexiones a nivel didáctico.

Desarrollo histórico-epistemológico del pentágono en el tiempo.

El pentágono regular ha sido tratado históricamente como símbolo místico, garante de la bella y la armonía; sin embargo, en este apartado se destacan aquellos momentos donde es notorio su estudio y en particular se mencionarán algunos matemáticos que dedicaron gran interés por su construcción.

Uno de esos personajes es el legendario Pitágoras de Samos (entre 580 a.C al 495 a.C), gran filósofo y matemático griego, al cual se le atribuyen el Teorema de Pitágoras, las relaciones aritméticas de la escala musical, el tratado de los números inconmensurables o aún el uso mágico del pentágono regular de donde se extraía "el pentagrama", símbolo por excelencia de su secta. En dicho símbolo se presenta uno de los conceptos base de cualquier pentágono regular como lo es la proporción áurea. Esta se obtiene por la división de un segmento en dos partes a y b, cumpliendo como condición que la longitud total a+b es al segmento más largo “a”, como “a” es al segmento más corto b (Joyce, 1997). Matemáticamente se simboliza con la letra griega Φ (llamada phi) y su valor numérico viene por dado por la igualdad $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887\ldots$

De Hipócrates de Quios (470 a.C.-410 a.C.), se destaca su aporte en la construcción del pentágono regular en función del lado (Ghyka, 1977), la cual puede verse simplificada a través del gráfico 1.

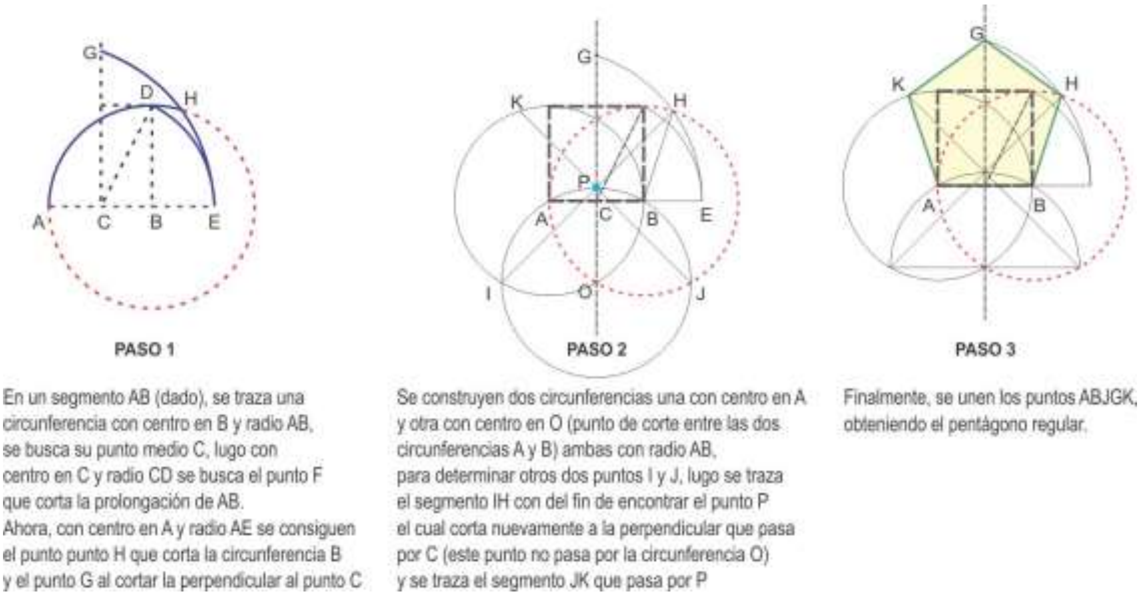

Gráfico 1. Construcción geométrica dada por Hipócrates de Quios

Otro personaje a destacar en la construcción geométrica del pentágono es el griego Euclides (vivió alrededor del s. IV y III a.C.), quien dejó un gran legado a través de su obra “Los Elementos”, en el cual aparece una de las construcciones geométricas más usada para el pentágono regular, la cual se ejemplifica por medio del gráfico 2

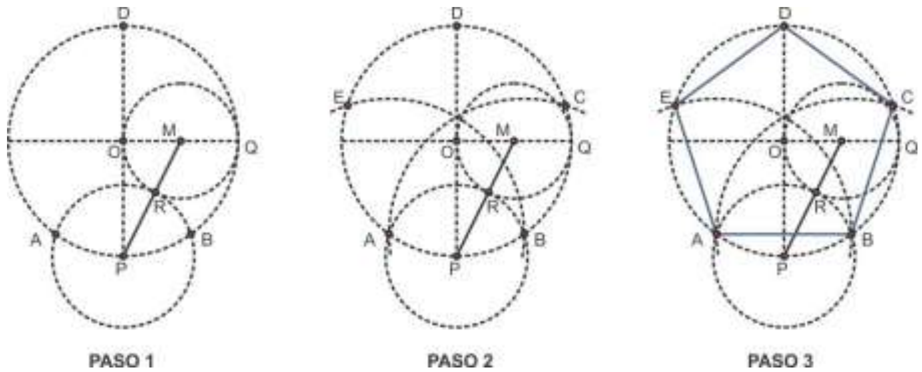

Gráfico 2. Construcción geométrica del pentágono regular por Euclides

Para elaborarlo: Primero, se trazan dos rectas perpendiculares por el centro O de la circunferencia (PD y OQ en la figura), luego se determina el punto medio M del segmento OQ y se dibuja la recta PM; con centro en M, se traza la circunferencia de radio MO y se denota con R la intersección de esta circunferencia con la recta PM. La circunferencia de centro en P y radio PR determina el lado AB del pentágono regular. En un segundo paso, con centro en A y radio AB se corta la circunferencia mayor en E, luego con centro en B e igual radio se corta la circunferencia mayor en C. Como último paso se unen los puntos ABCDE formando el pentágono (Ghyka, 1977).

Continuando con las reseñas históricas, tenemos a Ptolomeo (110-170 d.C.), su construcción geométrica para el pentágono regular es la más estudiada en las escuelas.

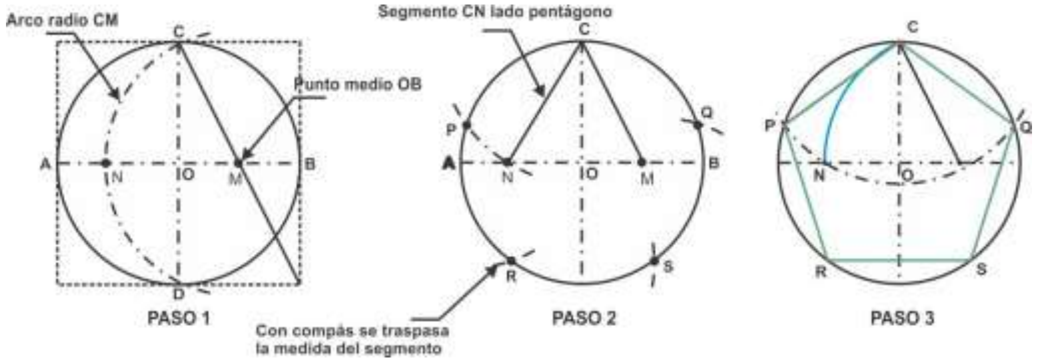

Gráfico 3. Construcción geométrica del pentágono regular por Ptolomeo

Brevemente explicando su construcción (ver gráfico 3), en un primer paso se traza una circunferencia O con radio OB, se busca el punto medio M de dicho radio y haciendo centro en M con radio MC se dibuja el arco CD para encontrar el punto N en el diámetro AB. En el segundo paso, con centro en C y radio CN se dibuja un arco que cortará la circunferencia O en dos puntos denominados P y Q. Luego haciendo centro en P y con radio CN se corta la circunferencia O en R, y con centro en Q e igual radio se consigue el punto S de la circunferencia O. Los puntos CPRSQ generan el pentágono.

Por último tenemos a Durero (1471-1528 d.C.), destacado artista del renacimiento, realizó un pentágono equilátero pero no equiangular, aunque llegó a considerar haberlo hecho regular. Su singular construcción está hecha con una sola abertura del compás y tiene como base la vésica piscis (dos circunferencias cuyos centros se encuentran en la circunferencia de la otra) la cual puede apreciarse en el gráfico 4.

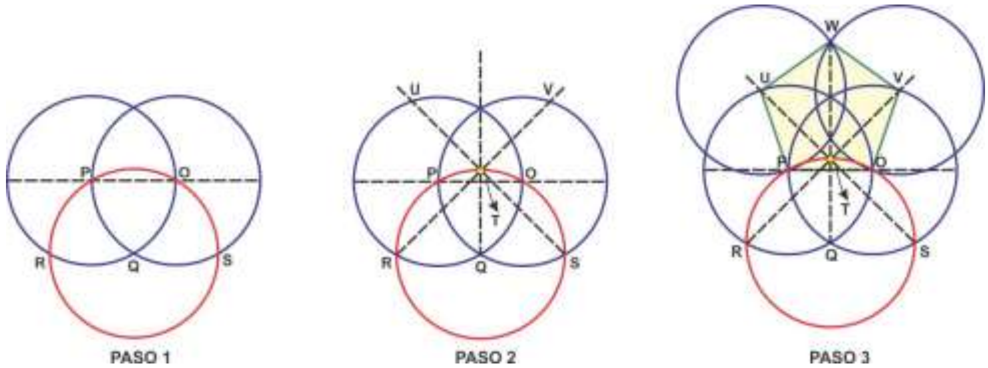

Gráfico 4. Construcción geométrica del pentágono equilátero de Durero

En el paso 1 se tienen las circunferencias O y P (en vésica piscis) que se cortan en Q, donde se traza otra circunferencia con igual radio para generar los puntos de corte R y S con las circunferencias anteriores. En el segundo paso, se dibuja la perpendicular a OP que pasa por Q para encontrar el punto T. A partir de este punto se trazan dos semirectas RT y SU a fin de obtener los puntos U y V. Para el tercer paso, se dibujan otras dos circunferencias con centro en U y V donde aparece el punto W de corte entre ellas, uniéndose por último los puntos OPUWV para dar forma al pentágono.

Construcción del pentágono regular en vésica dorada.

El anterior recorrido histórico-epistémico ha permitido dar un esbozo general de la concepción y construcción dada al pentágono regular en el tiempo, siendo dos puntos de relevancia los que han llevado a generar en esta investigación nuevas construcciones del mismo a partir del número áureo y del intento de corregir la construcción de Durero. Así se tiene como primer logro la construcción de pentágono regular a través de la denominada “vésica dorada”. Para clarificar, la vésica piscis (vejiga de pez en latín) es un símbolo hecho con dos círculos del mismo radio que se intersecan de manera que el centro de cada círculo está en la circunferencia del otro. Esta forma se denomina también mandorla (que significa "almendra" en italiano); en cambio, la vésica dorada es muy similar a la de la vésica piscis, pero se conforma bajo la razón áurea, en el gráfico 5 se tiene el análisis de esta razón.

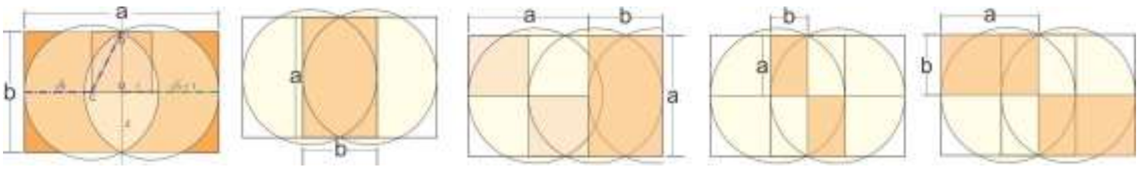

Gráfico 5. Construcción de la vésica dorada y razón áurea a/b= Φ

Para la construcción de la vésica dorada se toman dos circunferencias con radio igual a $\sqrt{5}$ y cuyos centros se encuentran en los vértices de un cuadrado con lados de dos unidades, tal como se observa en el paso 1 y 2 del gráfico 6, realizado de la siguiente manera: Se construye un cuadrado DD´CC´ de 2 x 2, cuyo centro coincida con el cruce de los ejes perpendiculares XY, se nombran los puntos O y O´, los cuales resultan de la intersección del cuadrado con el eje Y, aplicando Pitágoras se encuentra la hipotenusa del triángulo (OC´O´) de catetos 1 y 2, cuyo valor es $\sqrt{5}$. Luego (paso 2), con centro en C trazamos una circunferencia de radio igual a $\sqrt{5}$ y en C´ trazamos otra circunferencia con el mismo radio, esto conformará la vésica dorada. Por último, para obtener el pentágono se consideran los pasos 3 y 4, donde: Se dibuja en O y O´ respectivamente una circunferencia cuyo radio obviamente medirá $\sqrt{5}+1$, luego los puntos de intersección del eje Y con las circunferencias O y O´ se llamarán P_1 y Z respectivamente, mientras que P_2 y P_3 serán los puntos de intersección de las dos circunferencias O y O´ con el eje X. Ahora, se marcan los puntos P_4 y P_5 encontrados al proyectar las líneas que pasan por Z hasta la circunferencia de radio O y unen respectivamente los puntos P_4 y P_5. Así, con los puntos P_1, P_2, P_4, P_5 y P_3 se tiene el pentágono regular.

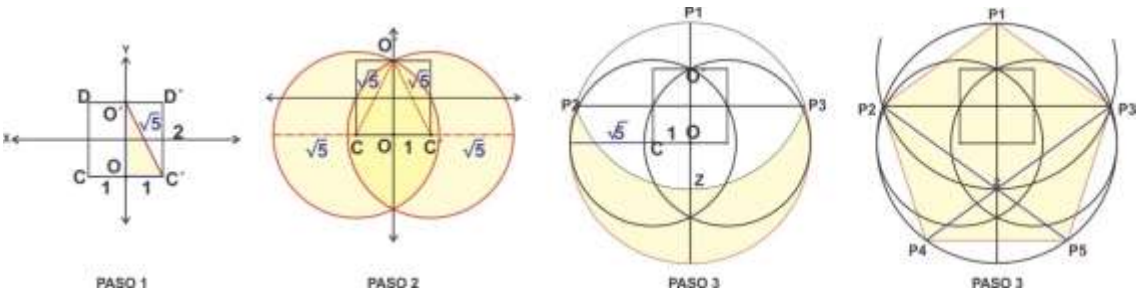

Gráfico 6. Nueva construcción del pentágono regular en vésica dorada

Reflexiones a nivel didáctico.

Del estudio histórico-epistemológico entorno al pentágono regular, se pueden generar diversas actividades con los estudiantes para que ellos mismos redescubran los pasos que llevaron a cabo otros matemáticos en la construcción de diversas formas geométricas, siendo eventualmente una alternativa didáctica que rompe con la rigurosidad demostrativa de enseñarla; parte de esto se evidencia en la construcción propuesta con la vésica dorada, y su didáctica radica en el uso de la $\sqrt{5}$ y su vinculación con la razón áurea, en cuyo caso da como resultado una construcción auto demostrada.

También debe rescatarse la enseñanza de conceptos poco tratados en la escolaridad, como lo son el número áureo y la vésica piscis; siendo de relevancia por su implicación histórica, su valor artístico y por ser parte de otros contenidos intra-matemáticos.

Otro aspecto a considerar, es dedicar un espacio para platicar sobre la biografía de personajes dedicados a la geometría, como Hipócrates de Quios, Euclides, Ptolomeo, entre otros; haciendo mención de sus aportes en la consolidación del pentágono regular; aspecto que confluye en el aprendizaje cultural del estudiante, además humaniza, sensibiliza y hace ver menos rígida la enseñanza de la matemática.

Finalmente, gran parte de este esfuerzo ha llevado la realización de un material didáctico, donde se cuenta entre otras con presentaciones para video beam y la elaboración de láminas en proporción áurea, las cuales conforman un documental detallado de todos los aspectos históricos-epistémicos del pentágono regular.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10* (2/3), 241-286.

Ghyka, Matila C. (1977). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Barcelona: Editorial Poseidon.

González, U. (1991). Historia de la Matemática: Integración cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, *9*(3), 281-289

González U., Pedro M. (2004). Historia de la Matemática: Integración cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Summa*, 45, 17-28

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14(3)*, 325-355.

Joyce, D. E. (1997). *Euclides: Proposiciones Libro XIII*. http://www.euclides.org/menu/elements_esp/13/proposicioneslibro13.htm Consultado 16/03/2010

Paruelo, J. (2003). *Enseñanza de las Ciencias y Filosofía.* http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/issue/view/1819 Consultado 10/03/2010

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologías de las matemáticas y de la educación matemática. En: A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp 827-876. Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Anexo I Muestra en miniatura del póster